

# DEFORMATIONEN VON (PSEUDO-)DARSTELLUNGEN

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Ann-Kristin Juschka

Seminar im Wintersemester 2013/14, dienstags 14:15 – 15:45 Uhr, INF 368, Raum 220

**Vorbesprechung:** Freitag 26.7., 10:45 Uhr, INF 288, HS 4

## Motivation und Ziele des Seminars

Eine grundlegende Methode eine Gruppe  $G$  zu verstehen ist es, ihre *Darstellungen*  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(R)$  über einem Ring  $R$  zu betrachten. Des Weiteren kann man mit Darstellungen auch geometrische Objekte beschreiben. So ist zum Beispiel eine elliptische Kurve über  $\mathbb{Q}$  durch die Darstellung von der absoluten Galoisgruppe  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  auf ihrem Tate-Modul zu einer Primzahl  $p$  (im Wesentlichen) bestimmt. Hierdurch wiederum wird eine Faktorgruppe von  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  beschrieben. Dies zeigt die grundsätzliche Bedeutung von Darstellungen in der Zahlentheorie.

Um geometrische Objekte zu variieren, ist es sinnvoll ihre assoziierten Darstellungen zu deformieren. So betrachtet Barry Mazur Deformationen einer *residuellen Darstellung*  $\bar{\rho}: \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  der absoluten Galoisgruppe eines Körpers  $K$  und zeigt unter bestimmten Voraussetzungen, dass eine *universelle Deformation*  $\rho^{\mathrm{univ}}$  existiert. Diese parametrisiert alle Deformationen von  $\bar{\rho}$ . Es war eine der innovativen Ideen von Andrew Wiles und Richard Taylor, die Deformationstheorie im Beweis des Großen Fermatschen Satzes zu benutzen.

In den Anwendungen ist es wichtig in allen Situation eine universelle Deformation zu haben. Mit diesem Ziel führt Gaëtan Chenevier in [Che11] *Pseudodarstellungen* (dort *Determinanten* genannt) ein. Jeder Darstellung  $\rho$  ordnet man eine Pseudodarstellung zu: das charakteristische Polynom  $g \mapsto \det(1 + t\rho(g))$ . Tatsächlich gilt umgekehrt:

**Theorem A** ([Che11]). *Sei  $D$  eine Pseudodarstellung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann gibt es eine eindeutige halbeinfache Darstellung  $\rho$  mit  $\det(1 + t\rho(g)) \cong D(1 + tg)$  für alle  $g \in G$ .*

Weiter zeigt Chenevier, dass zu jeder residuellen Pseudodarstellung  $\bar{D}$  eine *universelle Pseudodarstellung* existiert [Che11, Theorem E]. Falls  $\bar{D}$  das charakteristische Polynom  $\det(1 + t\bar{\rho})$  einer geeigneten residuellen Galoisdarstellung  $\bar{\rho}$  ist, gibt es eine Bijektion zwischen den Deformationen von  $\bar{\rho}$  und den Deformationen von  $\bar{D}$  [Che11, Example 3.4]. Insbesondere ist die Deformationstheorie von Chenevier eine Verallgemeinerung der Theorie von Mazur.

Im Seminar wollen wir die folgenden Punkte behandeln:

- I *Darstellungen und ihre (universellen) Deformationen* [Gou01]
- II *Pseudodarstellungen und grundlegende Eigenschaften* [Che11, §1]
- III *Struktur- und Endlichkeitsresultate und Beweis von Theorem A* [Che11, §2]
- IV *Existenz und Eindeutigkeit der universellen Pseudodarstellung* [Che11, §3.1]

## Literatur

- [Che11] Gaëtan Chenevier. The  $p$ -adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group and pseudorepresentations over arbitrary rings. In *Automorphic forms and Galois representations*, volume 94 of *Proceedings of the LMS Durham Symposium*, 2011. To appear, available at [www.math.polytechnique.fr/~chenevier/pub.html](http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/pub.html).
- [Gou01] Fernando Q. Gouvêa. Deformations of Galois representations. In *Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999)*, volume 9 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 233–406. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. Appendix 1 by Mark Dickinson, Appendix 2 by Tom Weston and Appendix 3 by Matthew Emerton.