

SEMINAR ZUR p -ADISCHEN GEOMETRIE

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Ann-Kristin Juschka und Yujia Qiu

Seminar im Sommersemester 2014, dienstags 14:15 – 15:45 Uhr, INF 368, Raum 220

Vorbesprechung: Freitag 7.2., 10:50 Uhr, INF 288, HS 4

Motivation und Ziele des Seminars

Als Erfinder der Geometrie über p -adischen Körpern gilt gemeinhin John Tate. Er hatte Ende der 50er Jahre Rechnungen zu elliptischen Kurven mit p -adischen Hilfsmitteln durchgeführt. Grothendieck kommentierte diese in einem Brief an Serre mit:

Tate has written to me about his elliptic curves stuff, and has asked me if I had any ideas for a global definition of analytic varieties over complete valuation fields. I must admit that I have absolutely not understood why his results might suggest the existence of such a definition, and I remain skeptical.

Tate ließ sich nicht entmutigen und skizzierte Ende der 60er Jahre weitgehende Ideen zu einer rigid-analytischen Geometrie über ultrametrisch bewerteten Körpern wie beispielsweise \mathbb{Q}_p . Die Motivation hierzu lag darin, p -adische Eigenschaften von Gleichungen – etwa der einer elliptischen Kurve – nicht alleine mit Methoden der algebraischen Geometrie zu untersuchen. Ein Vorbild hierbei war die Theorie algebraischer Kurven über den komplexen Zahlen \mathbb{C} , die äquivalent zu kompakten Riemannschen Flächen sind. Letztere können in der komplexen Analysis mit viel elementareren Methoden untersucht werden. Auf einer Riemannschen Fläche kann man zum Beispiel die Theorie der Integration und den Residuenkalkül benützen. Jede kompakte Riemannsche Fläche lässt sich *uniformisieren*. Am bekanntesten ist sicher der Fall elliptischer Kurven über \mathbb{C} : Jede solche lässt sich beschreiben als Quotient \mathbb{C}/Λ für ein \mathbb{Z} -Gitter in \mathbb{C} , oder, weniger bekannt in der multiplikativen Form $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ für eine komplexe Zahl mit Betrag $|q| > 1$.

Zwar lässt die rigid-analytische Geometrie keine einfache Integration zu. Ein Residuenkalkül im projektiven Raum \mathbb{P}^1 über ultrametrisch bewerteten Körpern ist aber leicht zu entwickeln. Dank Tates rigid-analytischen Räumen gibt es auch eine Uniformisierungstheorie für gewisse Kurven über \mathbb{Q}_p .

Im Seminar behandeln wir anhand der Quellen [Bos08, BGR84, FvdP04, Ber93] folgende Themen:

- I *Affinoide Räume*, die lokalen Bausteine rigid-analytischer Räume
- II *Konstruktion rigid-analytischer Räume* mithilfe von Grothendieck Topologie und Garben
- III *Beispiele rigider Räume* wie Tates elliptische Kurve; Residuenkalkül in Unterräumen von \mathbb{P}^1
- IV *Ausblicke auf eine Theorie von Berkovich*

Vorkenntnisse: Algebra I (Minimum), Algebra II (kommutative Algebra; empfohlen)

Optional, aber nützlich: z.B. Algebraische Zahlentheorie/Geometrie oder Funktionentheorie II

Literatur

- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78):5–161 (1994), 1993.
- [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Bos08] Siegfried Bosch. Lectures on formal and rigid geometry. 2008. Verfügbar auf <http://wwwmath.uni-muenster.de/sfb/about/publ/heft378.pdf>.
- [FvdP04] Jean Fresnel and Marius van der Put. *Rigid analytic geometry and its applications*, volume 218 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.