Algebraische Zahlentheorie 2 — Übungsblatt 12

Sommersemester 2018

Prof. Dr. G. Böckle
Dr. A. Conti *Besprechung:* Di 24.07.2018 in den Übungen

Sei K ein lokaler nicht-archimedischer Körper, $\pi_K \in \mathcal{O}_K$ ein Primelement, $\mathfrak{p}_K := \pi_K \mathcal{O}_K$, k der Restklassenkörper und p die Charakteristik von k. Sei $\overline{U}_K^n := U_K^n / U_K^{n+1}$ und seien

$$\iota_K^0 \colon \overline{U}_K^0 \to k^\times, \bar{\alpha} \mapsto \alpha \mod \pi_K \mathcal{O}_K$$

und

$$\iota_K^n \colon \overline{U}_K^n \to k, ((1+\pi_K^n \alpha) \mod U_K^{n+1}) \mapsto (\alpha \mod \pi_K \mathcal{O}_K)$$

die Isomorphismen aus Kapitel 3 der Vorlesung.

36. Aufgabe (1+1 Punkte, Unverzweigte Erweiterungen): Sei $L \supset K$ eine endliche unverzweigte Körpererweiterung mit Restklassenkörper k_L, so dass $[L : K] = [k_L : k]$. Sei $\pi_L := \pi_K$. Bezeichne $^-\colon \operatorname{Gal}(L/K) \to \operatorname{Gal}(k_L/k), \sigma \mapsto \bar{\sigma}$ den kanonische Isomorphismus. Für $n \geq 0$ induziert $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)$ einen Automorphismus auf $\overline{U}_L^n$, den wir mit σ_n bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 0$ gelten $\bar{\sigma} \circ \iota_n = \iota_n \circ \sigma_n$ für $n \geq 0$ und $N_{L/K} U_L^n \subset U_K^n$.

Bezeichne $N_n \colon \overline{U}_L^n \to \overline{U}_K^n$ für $n \geq 0$ die von $N_{L/K}$ induzierte Abbildung.

(b) Es gilt $\iota_K^0 \circ N_0 \circ (\iota_L^0)^{-1} = N_{k_L/k}$, und für $n \geq 1$ gelten $\iota_K^n \circ N_n \circ (\iota_L^n)^{-1} = \operatorname{Spur}_{k_L/k}$. Insbesondere gilt $N_{L/K} U_L^n = U_K^n$ für $n \geq 0$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $N_{k_L/k}$ und $\operatorname{Spur}_{k_L/k}$ surjektiv sind.

Sei im Weiteren $L \supset K$ eine zyklische Galoiserweiterung von Primzahlgrad ℓ und $G = \operatorname{Gal}(L/K)$. Sei $(G_s)_{s \geq -1}$ die höhere Verzweigungsfiltierung (in unterer Nummerierung), und sei $t := i_{L/K}(\sigma)$ für $\sigma \in G$ ein Erzeuger von G, so dass $G = G_t$ und $G_{t+1} = \{e\}$. Sei $\psi := \psi_{L/K}$ die Herbrand-Funktion.

37. Aufgabe (1+1+1+1 Punkte, Verzweigte zyklische Erweiterungen): Sei $m = (t+1)(\ell-1)$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion ψ hat Steigung 1 auf dem Intervall $(-1, t)$ und Steigung ℓ auf $\mathbb{R}_{>t}$.

(b) Für die Differente $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{L/K}$ gilt $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_L^m$.

(c) Es gilt $\operatorname{Spur}_{L/K} \mathfrak{p}_L^n = \mathfrak{p}_K^{r_n}$ mit $r_n = \lfloor \frac{m+n}{\ell} \rfloor$. **Vergleiche:** AZT 1, Aufgabe 21.

(d) Für $x \in \mathfrak{p}_L^n$ gilt $N_{L/K}(1+x) = 1 + \operatorname{Spur}_{L/K}(x) + N_{L/K}(x) \pmod{\operatorname{Spur} \mathfrak{p}_L^{2n}}$.

Sind für ein $n \geq 0$ die Inklusionen $N_{L/K} U_L^{\psi(n)} \subset U_K^n$ und $N_{L/K} U_L^{\psi(n)+1} \subset U_K^{n+1}$ gezeigt, so bezeichne stets $N_n \colon \overline{U}_L^{\psi(n)} \to \overline{U}_K^n$ die von $N_{L/K}$ induzierte Abbildung. Sie $\pi_K := N_{L/K} \pi_L$ für ein Primelement $\pi_L \in \mathcal{O}_L$. Sei $\theta_n \colon G \to \overline{U}_L^t$ wie in Aufgabe 10, Blatt 3.

38. Aufgabe (1+1+1 Punkte, Zahm verzweigte zyklische Erweiterungen): Gelte $t = 0$, d.h., L ist zahm verzweigt über K. Man kann stets π_L so wählen, dass $\pi_K = \pi_L^\ell$ gilt. (Warum?) Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 0$ gelten $N_{L/K} U_L^{\ell n} \subset U_K^n$ und $N_{L/K} U_L^{\ell n+1} \subset U_K^{n+1}$.

(b) Es gilt $\iota_K^0 \circ N_0 \circ (\iota_L^0)^{-1} : k^\times \to k^\times, \alpha \mapsto \alpha^\ell$, und $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta_0} \overline{U}_L^0 \xrightarrow{N_0} \overline{U}_K^0$ ist linksexakt.

(c) Für $n > 0$ gilt $\iota_K^n \circ N_n \circ (\iota_L^{\ell n})^{-1} : k \to k, \alpha \mapsto \ell\alpha$, und insbesondere ist N_n ein Isomorphismus.

39. Aufgabe (1+2+1+2+1 Punkte, Wild verzweigte zyklische Erweiterungen): Gelte $t > 0$, d.h., L ist wild verzweigt über K und $\ell = p$. Zeigen Sie:

(a) Es gelten $N_{L/K}U_L \subset U_K$ und $N_{L/K}U_L^1 \subset U_K^1$, sowie $\iota_K^0 \circ N_0 \circ (\iota_L^0)^{-1} : k^\times \to k^\times, \alpha \mapsto \alpha^\ell$.

(b) Sei $n > 0$, sei $x \in \mathfrak{p}_L^{\psi(n)}$ und definiere $\delta_{n<t} := 1$ für $n < t$ und $\delta_{n<t} := 0$ für $n \geq t$. Dann gelten $N_{L/K}(x) \in \mathfrak{p}^{\psi(n)}$ und $\mathrm{Spur}_{L/K}(x) \in \mathfrak{p}_K^{n+\delta_{n<t}}$. Insbesondere gelten

$$N_{L/K}(1+x) = \begin{cases} 1 + N_{L/K}(x) \pmod{\mathfrak{p}_K^{n+1}}, & \text{falls } n < t, \\ 1 + \mathrm{Spur}_{L/K}(x) + N_{L/K}(x) \pmod{\mathfrak{p}_K^{n+1}}, & \text{falls } n = t, \\ 1 + \mathrm{Spur}_{L/K}(x) \pmod{\mathfrak{p}_K^{n+1}}, & \text{falls } n > t. \end{cases}$$

(c) Für $n > 0$ gelten $N_{L/K}U_L^{\psi(n)} \subset U_K^n$ und $N_{L/K}U_L^{\psi(n)+1} \subset U_K^{n+1}$.

(d) Für $n > 0$ ist die Abbildung $\iota_K^n \circ N_n \circ (\iota_L^{\psi(n)})^{-1}$ von der Form $\alpha \mapsto a_n\alpha + b_n\alpha^p$ mit $a_n \in k^\times$ für $n \geq t$ und $a_n = 0$ für $n < t$, und $b_n = 0$ für $n > t$ und $b_n = 1$ für $n \leq t$.
Hinweis: Um $a_t \neq 0$ zu zeigen sollte man $N_t \circ \theta_t = 0$ überlegen.

(e) Die Sequenz $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta_t} \overline{U}_L^t \xrightarrow{N_t} \overline{U}_K^t$ ist linksexakt, und N_n ist ein Isomorphismus für $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{t\}$.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie 2 finden Sie unter
`http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Gebhard.Boeckle/AZT2-SS2018/`