Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

1. Übungsblatt

18.10.2019

Sei K ein nicht archimedischer Körper, d.h. ein Körper der vollständig ist bzgl. einer nicht-archimedischen Norm $|\cdot|$. Wir nehmen an, dass $|\cdot|$ nicht trivial ist.

Aufgabe 1. Sei $T_n := K\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ die Tate-Algebra in n Variablen über K. Zeige: Die Gaußnorm

$$\|\cdot\| : T_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \|\sum_{J \in \mathbb{N}_0^n} a_J X^J\| := \max_J |a_J|$$

besitzt folgende Eigenschaften.

1. $\|\cdot\|$ ist eine K-Banachalgebren-Norm auf T_n, d.h. für alle $f, f_1, f_2 \in T_n$, $c \in K$ gilt
   - $\|f_1 + f_2\| \leq \max(\|f_1\|, \|f_2\|)$,
   - $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$,
   - $\|f_1 f_2\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\|$,
   - T_n ist vollständig bzgl. der Metrik $\|f_1 - f_2\|$.
2. $\|\cdot\|$ ist sogar multiplikativ, d.h. $\|f_1 f_2\| = \|f_1\| \cdot \|f_2\|$.
3. Sei $D_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{K}^n : |x_i| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball in $\overline{K}^n$. Dann ist
$$\|f\| = \sup_{x \in D_n} |f(x)| = \max_{x \in D_n} |f(x)|.$$
4. Finde ein Beispiel eines Elementes $f \in \mathbb{Q}_p\langle X\rangle$, sodass $\|f\| > \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|$.

Hinweis zu (2): Reduziere durch Skalierung mit $K^\times$ auf den Fall von Einheitsvektoren.

Aufgabe 2. Sei $(A, \|\cdot\|)$ eine K-Banachalgebra.

1. Zeige, dass die Teilmenge A° der potenzbeschränkten Elemente eine $\mathcal{O}_K$-Unteralgebra ist.
2. Zeige, dass die Abbildung
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{K-Ban.-Alg.}(T_n, A) & \longrightarrow & (A^\circ)^n \\ \phi & \mapsto & (\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n)) \end{array}$$
   ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3. Sei A eine K-affinoide Algebra, d.h. $A \cong T_n/I$ für ein Ideal $I \subset T_n$ und ein $n \geq 1$. Zeige, dass

$$\|\overline{f}\|_{T_n/I} := \inf_{f \bmod I = \overline{f}} \|f\|$$

eine K-Banachalgebren-Struktur auf A definiert.

Aufgabe 4. Sei A eine K-affinoide Algebra. Beweise, dass dann auch die Tate-Algebra $A\langle \underline{Y} \rangle = A\langle Y_1, \ldots, Y_n \rangle$ eine K-affinoide Algebra ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Freitag, 25.10.2019, 12:00 Uhr
in den Zettelkasten Nr. 26 vor dem Dekanat
(Mathematikon, INF 205, 1. Stock).