Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

10. Übungsblatt

20.12.2019

Zu Beginn der Vorlesung hatten wir die Theorie der adischen Räume dadurch motiviert, dass sie manche Aspekte der rigiden Geometrie verbessert. So liegt, im Gegensatz zu einem rigiden Raum, jedem adischen Raum ein topologischer Raum zugrunde, und dieser hat genügend viele Punkte (im technischen Sinne).
Seit 2011 gibt es aber noch eine weitere Motivation, die Theorie der adischen Räume zu verstehen. Die Motivation ist diese: Man möchte die Theorie der *perfektoiden Räume* studieren. Perfektoide Räume sind spezielle adische Räume, die eine Brücke bilden zwischen nicht-archimedischer Geometrie in Charakteristik 0 und nicht-archimedischer Geometrie in Charakteristik p.

Aufgabe 1. Perfektoide Räume wurden von Peter Scholze in seiner bahnbrechenden Dissertation definiert und studiert. Er erhielt 2018 die Fields Medaille "for transforming arithmetic algebraic geometry over p-adic fields through his introduction of perfectoid spaces, with application to Galois representations, and for the development of new cohomology theories." Mache Dich mit dem Kontext ein wenig vertraut, indem Du den Artikel: *"Über einige Aspekte der Arbeit von Peter Scholze" von Torsten Wedhorn liest.*

Die Ringe, die perfektoiden Räumen zugrunde liegen, sind die sogenannten perfektoiden Ringe *und wie folgt definiert.*[1]

Definition: Ein *perfektoider Ring* ist ein vollständiger uniformer Tate Ring, der eine topologisch nilpotente Einheit $\varpi \in R$ besitzt, sodass $\varpi^p | p$ in R° und so dass die Frobenius Abbildung

$$\phi\colon R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p, x \mapsto x^p$$

ein Isomorphismus ist.

Wir wollen diese Definition mit Hilfe der folgenden Aufgaben besser verstehen. Zunächst machen wir uns klar, dass die Bedingung an ϕ eine Surjektivitätsbedingung ist. Es ist üblich eine topologisch nilpotente Einheit in einem Tate Ring als Pseudo-Uniformisierer zu bezeichnen, und wir tun dies im folgenden.

Aufgabe 2. *Sei R ein vollständiger Tate Ring und sei $\varpi \in R$ ein Pseudo-Uniformisierer, mit $\varpi^p | p$ in R°. Zeige:*

[1] Zur Erinnerung: $R^\circ \subset R$ bezeichnet wie üblich den Unterring der potenzbeschränkten Elemente. Nach Definition ist R uniform genau dann, wenn R° beschränkt ist.

(a) *Die Frobenius Abbildung* $\phi\colon R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p$ *ist injektiv.*

(b) ϕ *ist surjektiv, genau dann wenn die Abbildung*

$$R^\circ/p \to R^\circ/p, x \mapsto x^p$$

surjektiv ist.

Ein vollständiger uniformer Tate Ring R *ist also perfektoid, genau dann wenn die Frobenius Abbildung* $R^\circ/p \to R^\circ/p$ *surjektiv ist. Insbesondere ist die Zusatzbedingung in der Definition unabhängig vom Pseudo-Uniformisierer.*

Aufgabe 3. *Sei* R *ein separierter, uniformer Tate Ring. Zeige, dass* R *reduziert ist.*
Zur Erinnerung: Sei $(R_0, \varpi R_0)$ ein Definitionspaar. Separiertheit bedeudet, dass $\bigcap \varpi^n R_0 = \{0\}$ gilt.
Da vollständige Tate Ringe immer separiert sind, ist also jeder perfektoide Ring reduziert.

Aufgabe 4. *Sei* R *ein vollständiger Tate Ring mit* $pR = 0$. *Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

(a) R *ist perfektoid.*

(b) R *ist perfekt, d.h.* $\phi\colon R \to R, x \mapsto x^p$ *ist ein Isomorphismus.*

Hinweis zur Implikation $(b) \Rightarrow (a)$: Sei $R_0 \subset R$ ein Definitionsring. Zeige, dass dann auch $R_0' := \bigcap_n \phi^{-n}(R_0)$ ein Definitionsring ist. Benutze hierfür, dass nach Banachs Satz über die offene Abbildung das Bild $\phi(R_0) \subset R$ offen ist.
Um Uniformität von R zu zeigen, hilft es schließlich einzusehen, dass die topologisch nilpotenten Elemente $R^{\circ\circ}$ in R_0' enthalten sind.

Aufgabe 5.

(a) *Sei* $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$ *die t-adische Vervollständigung von* $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$. *Zeige, dass* $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$ *ein perfektoider Ring ist.*

(b) *Zeige, dass* $\mathbb{Q}_p$ *kein perfektoider Ring ist.*

Abgabe bis Freitag, 10.01.2020, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.

Schöne Ferien und einen guten Rutsch ins neue Jahr!