Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

11. Übungsblatt

10.01.2020

Aufgabe 1. Sei $A = \mathbb{Z}_p[[x]]$ versehen mit der (p, x)-adischen Topologie.
Bestimme $\mathrm{Cont}(A)\backslash\mathrm{Cont}(A)_{an}$, d.h. alle nicht-analytischen stetigen Bewertungen auf A.

Aufgabe 2. Sei A ein Huber Ring. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Cont}(\hat{A}) \to \mathrm{Cont}(A)$$

bijektiv ist.
Hinweis: Ein adischer Ring (mit Definitionsideal I) ist Hausdorff genau dann, wenn $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, vollständig bzgl. einer nicht-archimedischen Bewertung von Rang 1. Betrachte den Unterring

$$B := \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i T^i \in K^\circ\langle T\rangle : \ |a_i| < 1, \forall i \geq 1 \right\} \subset K^\circ\langle T\rangle.$$

Zeige $(K\langle T\rangle, K^\circ\langle T\rangle)$ und $(K\langle T\rangle, B)$ sind Huber Paare.

Wir führen unseren Exkurs über perfektoide Ringe fort. Die Theorie der perfektoiden Räume verbindet Geometrie in Charakteristik 0 *und Charakeristik p. Dies geschieht durch den sogenannten Tilting- Formalismus. Einem perfektoiden Ring R in Charakteristik* 0 *lässt sich auf natürliche Weise ein perfektoider Ring* $R^\flat$ *in Charakteristik p zuordnen, der sogenannte Tilt von R. Bei dieser Konstruktion geht erstaunlich wenig Information verloren. Wir wollen den Tilt in der Übungsgruppe genauer verstehen. Hierzu dienen folgende Aufgaben als Vorbereitung.*

Konstruktion: Sei R ein perfektoider Tate Ring mit Pseudo-Uniformisierer ϖ mit $\varpi^p \mid p$. Betrachte die Menge

$$R^{\flat\circ} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^\circ := \left\{ (x_n) \in (R^\circ)^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, (x_{n+1})^p = x_n \right\}$$

mit der projektiven Limes Topologie, der komponentenweise Multiplikation und der Addition, die definiert ist durch: $(x_n) + (y_n) = (z_n)$, wobei $z_n = \lim_{r \to +\infty} (x_{n+r} + y_{n+r})^{p^r}$.

Aufgabe 4. Zeige: Die Addition ist wohldefiniert auf $R^{\flat\circ}$.
Hinweis: Für $a, b \in R^\circ$ *ist* $(a + \varpi b)^p - a^p - (\varpi b)^p \in \varpi p R^\circ$.

Aufgabe 5. Sei S ein Ring und $\varpi \in S$. Wir nehmen an, dass S ϖ-adisch vollständig ist, sowie, dass $\varpi \mid p$ in S. Zeige, dass die natürliche Projektionsabbildung $S \to S/\varpi$ einen Isomorphismus von topologischen Monoiden

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} S \to \varprojlim_{x \mapsto x^p} S/\varpi S$$

induziert. Hierbei sind die Monoidoperationen die Multiplikationen in den Ringen.

Abgabe bis Freitag, 17.01.2020, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.