Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

12. Übungsblatt

17.01.2020

Aufgabe 1. Sei $h\colon (B, B^+) \to (C, C^+)$ eine adische Abbildung von Huber Paaren und $\mathrm{Spa}(h)\colon Y = \mathrm{Spa}(C, C^+) \to X = \mathrm{Spa}(B, B^+)$ die induzierte Abbildung zwischen den adischen Spektra. Zeige:

(a) Es gilt:
$$\mathrm{Spa}(h)^{-1}\left(X\left(\frac{T}{s}\right)\right) = Y\left(\frac{h(T)}{h(s)}\right),$$
d.h. Urbilder rationaler Bereiche sind wieder rationale Bereiche.

(b) $\mathrm{Spa}(h)$ ist spektral.

Aufgabe 2. Sei (A, A^+) ein Huber Paar. Zeige, dass $\mathrm{Spa}(A, A^+) \subset \mathrm{Cont}(A)$ dicht liegt und alle trivialen Bewertungen aus $\mathrm{Cont}(A)$ sowie alle Rang 1 Punkte in $\mathrm{Cont}(A)_{an}$ enthält. *Hinweis: Zeige, dass jedes $x \in \mathrm{Cont}(A)$ eine vertikale Spezialisierung eines Elementes $y \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$ ist.*

Aufgabe 3. Sei K ein nicht-archimedischer Körper, d.h. K ist vollständig bezüglich einer nicht-archimedischen Bewertung von Rang 1. Finde ein Element $v \in \mathrm{Cont}(K\langle T\rangle)$, das nicht in $\mathrm{Spa}(K\langle T\rangle, K^\circ\langle T\rangle)$ enthalten ist.
Hinweis: Modifiziere die Bewertung von Aufgabe 4 auf Blatt 3.

Aufgabe 4. Sei (A, A^+) ein Huber Paar und $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Mengen
$$X\left(\frac{T}{s}\right) = \{v \in X : v(t_i) \leq v(s) \neq 0\},$$
wobei $s \in A$ und $T \subset A$ eine endliche Teilmenge ist, sodass $T \cdot A$ offen ist, quasi-kompakte offene Teilmengen von X sind. Sie bilden eine Basis der Topologie von X, die stabil unter endlichen Schnitten ist. Sei nun $A^+\left[\frac{T}{s}\right] \subset A\left(\frac{T}{s}\right) = A_s$ die offene Unteralgebra, die erzeugt wird von den Brüchen t/s mit $t \in T$. Zeige:
Die natürliche Abbildung $\mathrm{Spa}(\varphi)\colon Y := \mathrm{Spa}\left(A\left(\frac{T}{s}\right), A^+\left[\frac{T}{s}\right]\right) \to X$ ist ein Homöomorphismus auf $X\left(\frac{T}{s}\right)$. Eine Teilmenge $S \subset Y$ ist ein rationaler Bereich genau dann, wenn $\mathrm{Spa}(\varphi)(S) \subset X$ ein rationaler Bereich ist.
Für den Beweis darf folgende Tatsache benutzt werden: Sei (B, B^+) ein Huber Paar und $W \subset \mathrm{Spa}(B, B^+)$ quasi-kompakt. Sei $f \in B$ mit $v(f) \neq 0$ für alle $v \in W$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset B$ von $0 \in B$ mit $v(f) > v(u)$ für alle $v \in W$ und alle $u \in U$.

Für die nächste Aufgabe darf folgende wichtige Tatsache benutzt werden:
Sei B ein vollständiger Huber Ring und seien $f_1, \dots, f_n, g \in B$ Elemente, sodass $f_1, \dots, f_n$ ein offenes Ideal in B erzeugen. Dann gibt es eine Umgebung V von 0 in B, sodass für alle $f_1', \dots, f_n', g' \in B$ gilt: Falls $f_i' \in f_i + V$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $g' \in g + V$, dann ist auch das von $f_1', \dots, f_n'$ erzeugte Ideal in B offen und

$$\mathrm{Cont}(B)\left(\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right) = \mathrm{Cont}(B)\left(\frac{f_1', \dots, f_n'}{g'}\right).$$

Sei nun (A, A^+) ein Huber Paar. Dann ist seine Vervollständigung $(\hat{A}, \hat{A}^+)$ wieder ein Huber Paar. Hierbei bezeichnet $\hat{A}^+$ den Abschluss von A^+ in A.

Aufgabe 5. Sei (A, A^+) ein Huber Paar. Zeige:
Die kanonische Abbildung $h : \mathrm{Spa}(\hat{A}, \hat{A}^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ erhält rationale Bereiche, d.h. eine Teilmenge von $\mathrm{Spa}(\hat{A}, \hat{A}^+)$ ist ein rationaler Bereich genau dann, wenn ihr Bild in $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ ein rationaler Bereich ist.

Abgabe bis Freitag, 24.01.2020, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.