Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

13. Übungsblatt

24.01.2020

Aufgabe 1. Sei $D = \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p\langle T\rangle, \mathbb{Z}_p\langle T\rangle)$ die abgeschlossene adische Einheitskreisscheibe über $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$. Wir definieren die *affine Gerade* als

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} = \varinjlim D,$$

wobei die Übergangsabbildungen gegeben sind durch $T \mapsto pT$. Mit anderen Worten, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ ist die aufsteigende Vereinigung abgeschlossener Kreisscheiben D_i mit Radius p^i. Zeige:

(a) $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ ist ein adischer Raum und nicht quasi-kompakt.

(b) $D = D_0 \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ ist nicht abgeschlossen.

Zusatzfrage: Was ist der Abschluss von D in $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$?

Aufgabe 2. Sei $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ ein affinoider adischer Raum, und $W = \mathrm{Spa}(B, B^+)$ ein affinoider offener Unterraum von X. Sei $x \in W$ ein Element. Zeige: x ist analytisch in X genau dann, wenn x analytisch in W ist.
Hinweis: Reduziere die Aussage auf den Fall, dass W ein rationaler Bereich in X ist.

Aufgabe 3. Sei K ein nicht-archimedischer Körper. Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring und $\varpi \in \mathcal{O}$ ein Element mit $0 < |\varpi| < 1$. Sei $R = K[T, T^{-1}, Z]/(Z^2)$. Sei R_0 der $\mathcal{O}$−Untermodul von R mit $\mathcal{O}$-Basis

$$\varpi^{|n|}T^n,\ n \in \mathbb{Z}, \varpi^{-|n|}T^n Z,\ n \in \mathbb{Z}.$$

(Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ den üblichen archimedischen Absolutbetrag auf $\mathbb{Z}$). Verifiziere, dass R_0 eine $\mathcal{O}$-Unteralgebra von R ist mit $KR_0 = R$. Zeige, dass das Ideal $ZR \cap R_0 \subset R_0$ nicht endlich erzeugt, und R_0 somit nicht noethersch ist.

Aufgabe 4. In der Notation von Aufgabe 3, sei R mit der Topologie ausgestattet, in der $\varpi^N R_0$ eine fundamentales System offener Umgebungen der 0 ist. Betrachte das Huber Paar (R, R°). Sei $X = \mathrm{Spa}(R, R^\circ)$. Wir wollen zeigen, dass für dieses Huber Paar die Prägarbe $\mathcal{O}_X$ keine Garbe ist. Sei hierzu

$$U = \{x \in X : |T(x)| \leq 1\},$$

$$V = \{x \in X : |T(x)| \geq 1\}.$$

(a) Zeige, dass U und V rationale Bereiche von X sind und dass $U \cup V = X$ ist.

(b) Zeige, dass $Z \neq 0$ in $\mathcal{O}_X(X)$, aber dass $Z = 0$ in $\mathcal{O}_X(U)$ und in $\mathcal{O}_X(V)$. Insbesondere ist die Restriktions-Abbildung $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U) \oplus \mathcal{O}_X(V)$ nicht injektiv.

Dieses Beispiel zeigt, dass auch für gute Huber Ringe (R ist Tate, und endlich erzeugt als K-Algebra) die Wahl eines fiesen Definitionsringes dazu führen kann, dass die Garbeneigenschaft verletzt ist.

Abgabe bis Freitag, 31.01.2020, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.