Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

2. Übungsblatt

25.10.2019

Sei $(K, |\cdot|)$ ein nicht archimedischer Körper. Wir nehmen im Folgenden an, dass $|K^\times| \neq \{1\}$.

Aufgabe 1. Zeige: Die Tate-Algebra $T_n(K)$ ist ein noetherscher Ring, d.h. jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $T_n(K)$ ist endlich erzeugt.
Hinweis: Benutze das Weierstraßsche Divisionslemma.

Aufgabe 2. Eine lineare Abbildung $L : A \to B$ zwischen zwei K-Banachräumen $(A, \|\cdot\|_A)$ und $(B, \|\cdot\|_B)$ heißt *beschränkt*, falls ein $\delta > 0$ existiert, mit $\|L(a)\|_B \leq \delta \|a\|_A$ für alle $a \in A$. Zeige: Eine lineare Abbildung $L : A \to B$ ist beschränkt genau dann, wenn sie stetig ist.

Für die nächste Aufgabe benötigen wir zunächst folgende Definition.
Definition (Vollständiges Tensorprodukt): Seien A und B zwei K-Banachalgebren. Betrachte das Tensorprodukt $A \otimes_K B$ und definiere die Funktion $|\cdot| : A \otimes_K B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$|z| := \inf \left(\max_{i=1,\dots,r} |a_i| \cdot |b_i| \right), \quad z \in A \otimes_K B,$$

wobei das Infimum gebildet wird über alle Darstellungen

$$z = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i, \quad a_i \in A,\ b_i \in B.$$

Dies definiert eine Seminorm auf $A \otimes_K B$. Das *vollständige Tensorprodukt* $A \hat{\otimes}_K B$ ist definiert als die Vervollständigung von $A \otimes_K B$ bezüglich $|\cdot|$.
Fakt: Dann ist $A \hat{\otimes}_K B$ eine K-Banachalgebra. Es gibt eine natürliche beschränkte bilineare Abbildung $\tau : A \times B \to A \hat{\otimes}_K B, (a, b) \mapsto a \hat{\otimes} b$. (Beschränkt meint hier: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass $|\tau((a, b))| \leq \delta \cdot |a| \cdot |b|$, für alle $a \in A, b \in B$.)

Aufgabe 3.

(a) Zeige: Die K-Banachalgebra $A \hat{\otimes}_K B$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft:
Für jede K-Banachalgebra R und jede beschränkte bilineare Abbildung $\phi : A \times B \to R$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus von K-Banachalgebren $\varphi : A \hat{\otimes}_K B \to R$, sodass $\phi = \varphi \circ \tau$.

(b) Sei A eine K-affinoide Algebra und fixiere n unabhängige Variablen $X_1, \dots, X_n$. Zeige: Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von K-Banachalgebren

$$A \hat{\otimes}_K K\langle X_1, \dots, X_n \rangle \xrightarrow{\sim} A\langle X_1, \dots, X_n \rangle.$$

(Insbesondere erhalten wir für $n, m \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus $T_n \hat{\otimes}_K T_m \cong T_{n+m}$.)

Hinweis zu (b): Benutze die universelle Eigenschaft aus (a) und Aufgabe 2.

Abgabe bis Donnerstag, 31.10.2019, 18:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.