Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

4. Übungsblatt

8.11.2019

Aufgabe 1. Sei R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper $K := \mathrm{Quot}(R)$. Zeige:

(a) R ist ganz abgeschlossen in K.

(b) Jedes endlich erzeugte Ideal in R ist ein Hauptideal.

(c) Ein R-Modul M ist flach genau dann wenn er torsions-frei ist (d.h. falls für alle $0 \neq r \in R, 0 \neq m \in M$ gilt $rm \neq 0$).

Aufgabe 2.

(i) Sei K ein Körper. Seien $B \subset A \subset K$ zwei Unterringe, wobei B ein Bewertungsring von K sei. Zeige:

  (a) A ist auch ein Bewertungsring von K.
  (b) $\mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_B$, mit Gleichheit genau dann, wenn $A = B$.
  (c) $\mathfrak{m}_A$ ist ein Primideal von B und $A = B_{\mathfrak{m}_A}$.
  (d) $B/\mathfrak{m}_A$ ist ein Bewertungsring des Körpers $A/\mathfrak{m}_A$.

(ii) Umgekehrt sei $A \subset K$ ein Bewertungsring, sei $\overline{B}$ ein Bewertungsring von $A/\mathfrak{m}_A$ und sei B das Urbild (unter der kanonischen Projektion $\pi\colon A \to A/\mathfrak{m}_A$) von $\overline{B}$ in A. Zeige:

  (a) B ein Bewertungsring von K (insbesondere ist $K = \mathrm{Quot}(B)$).
  (b) Es gilt $\mathfrak{m}_B = \pi^{-1}(\mathfrak{m}_{\overline{B}})$.

(iii) Wir wollen diese Aussagen an einem Beispiel nachvollziehen. Sei k ein Körper und definiere $K = k((u))((t))$. Betrachte den Bewertungsring $A = k((u))[[t]]$ der t-adischen Bewertung auf K. Dann hat $A/\mathfrak{m}_A = k((u))$ die u-adische Bewertung mit Bewertungsring $\overline{B} = k[[u]]$. Bestimme $B = \pi^{-1}(\overline{B})$, das maximale Ideal $\mathfrak{m}_B$, den Rang und die Wertegruppe von B.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $R \subset K$ ein Bewertungsring. Zeige:
Der Rang von R stimmt mit der Krulldimension von R überein.
Hinweis: Benutze II.3, Satz 3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und betrachte den Ring der formalen Potenzreihen $K[[Y,Z]]$. Sei $L := \mathrm{Quot}(K[[Y,Z]])$ der Quotientenkörper. Definiere eine Bewertung $|\cdot|\colon L \to \gamma^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ auf L durch $|Y^i| = \gamma^{-i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $|f(Z)| = 1$ für alle $f(Z) \in K[[Z]]$.

(a) Zeige, dass $|\cdot|$ in der Tat eine Bewertung definiert.

(b) Zeige, dass der Bewertungsring $R := \left\{\frac{f}{g} \in L : |f| \leq |g|\right\}$ nicht henselsch ist:
Betrachte hierzu das Polynom $P(T) = T^2 - T + \frac{Y}{Z} \in R[T]$. Sei $\mathfrak{m} \subset R$ das maximale Ideal. Dann besitzt die Reduktion $\overline{P}(T) = T(T-1)$ zwei Nullstellen in $R/\mathfrak{m}$. Zeige, dass $P(T)$ keine Nullstelle in R besitzt.

Bonusaufgabe (vgl. Übung 1 aus Bourbaki Algèbre commutative, § 8).
Sei K ein Körper, $A = K[[X,Y,Z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in drei Variablen über K. Betrachte die total geordnete Gruppe $\Gamma := \gamma^{\mathbb{Z}} \times \tau^{\mathbb{Z}}$ mit der lexikographischen Ordnung versehen.
Sei $|\cdot|$ (bzw. $|\cdot|'$) die Bewertung auf A mit Werten in Γ, sodass $|X| = (\gamma^{-1}, 1), |Y| = (1, \tau^{-1})$ und $|f(Z)| = (1,1)$ für alle $f \neq 0$ in $K[[Z]]$ (bzw. $|X|' = (\gamma^{-1}, 1), |Z|' = (1, \tau^{-1})$, und $|g(Y)|' = (1,1)$ für alle $g \neq 0$ in $K[[Y]]$).
Sei $\sigma\colon A \to A$ der Automorphismus, sodass $\sigma|_K = \mathrm{id}$, $\sigma(X) = X, \sigma(Y) = Z, \sigma(Z) = Y)$ und betrachte den Invariantenring $B := A^\sigma$. Sei $E := \mathrm{Quot}(A)$ der Quotientenkörper von A und $F := \mathrm{Quot}(B)$ der von B.

(a) Zeige: $|\cdot|$ und $|\cdot|'$ definieren in der Tat Bewertungen auf A, die sich kanonisch auf E fortsetzen lassen.

(b) E/F ist eine quadratische Körpererweiterung.

(c) $|\cdot|$ und $|\cdot|'$ stimmen auf F überein.

Zusatzfrage: Ist F vollständig bzgl. $|\cdot|$?

Abgabe bis Freitag, 15.11.2019, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.