Adische Räume Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

5. Übungsblatt

15.11.2019

Aufgabe 1. Zeige:

(a) Ein lokal spektraler Raum ist nüchtern.

(b) Jeder lokal abgeschlossene Teilraum eines nüchternen Raumes ist wieder nüchtern.

(c) Jeder quasi-kompakte offene Teilraum eines spektralen Raumes ist wieder spektral.

(d) Jeder lokal spektrale Raum hat eine Basis aus spektralen offenen Teilräumen.

Aufgabe 2. Sei $X := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der üblichen Totalordnung und der Topologie mit den offenen Mengen $\{X_{<x} : x \in X\} \cup \{X\}$. Zeige:

(a) X ist ein spektraler Raum.

(b) $X \cong \mathrm{Spec}(A)$ für einen Bewertungsring A mit Werte-Gruppe $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ (lexikographisch geordnet).

Sei Y definiert als die Verklebung zweier Kopien von X entlang von $X_{<\infty}$. Zeige, dass Y lokal spektral und quasi-kompakt, aber nicht quasi-separiert ist. Insbesondere ist Y nicht spektral.

Aufgabe 3. Sei X ein spektraler Raum. Zeige: Die konstruierbare Topologie ist die gröbste Topologie, so dass alle abgeschlossenen Teilmengen von X sowie alle quasi-kompakten Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Aufgabe 4. Sei X ein endlicher Kolmogorov Raum. Zeige:

(a) X ist spektral.

(b) Jede Teilmenge von X ist konstruierbar.

Abgabe bis Freitag, 22.11.2019, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.