**Adische Räume** Prof. Dr. Otmar Venjakob
Wintersemester 19/20 Dr. Judith Ludwig

# 6. Übungsblatt

22.11.2019

**Aufgabe 1**. Sei $X$ ein spektraler Raum und $Z$ ein Teilraum. Zeige:

(a) $Z$ ist pro-konstruierbar, genau dann wenn $Z$ spektral ist und die Inklusion $Z \hookrightarrow X$ spektral ist.

(b) Für eine pro-konstruierbare Teilmenge $Z$ von $X$ stimmt der Abschluss von $Z$ mit der Menge der Spezialisierungen der Punkte von $Z$ überein.

**Aufgabe 2**. Für einen nicht-archimedischen Körper $K$ betrachte das Bewertungsspektrum $\mathrm{Spv}(K\langle T\rangle)$ der Tate Algebra in einer Variablen. Zeige, dass die Bewertung $v$ von Blatt 3, Aufgabe 4 eine Spezialisierung der Gaußnorm $|\cdot|$ ist, d.h. dass gilt $v \in \overline{\{|\cdot|\}}$.

*Sei $K$ ein Körper, $A \subset K$ ein Unterring. Der* Riemann–Zariski Raum *von $K$ über $A$ ist die Menge*

$$RZ(K, A) := \{R \supset A : \ R \text{ ist ein Bewertungsring von } K\}.$$

*Auf $RZ(K, A)$ installieren wir die Topologie, deren Basis offener Mengen gegeben ist durch*

$$U(x_1, \dots, x_n) = \{R \in RZ(K, A) : x_1, \dots, x_n \in R\}, \ \text{für } x_1, \dots, x_n \in K.$$

*Falls $A$ das Bild von $\mathbb{Z}$ ist, so schreiben wir $RZ(K, \mathbb{Z}) = RZ(K)$ und nennen dies den* Riemann–Zariski Raum *von $K$.*

**Aufgabe 3**. Zeige:

(a) Es gibt einen Homöomorphismus $RZ(K) \cong \mathrm{Spv}(K)$.

(b) Seien $R, R' \in RZ(K, A)$. Dann ist $R$ eine Spezialisierung von $R'$ in $RZ(K, A)$ genau dann wenn $R \subset R'$.

(c) Für einen Ring $B$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ ist die Faser $supp^{-1}(\mathfrak{p})$ der Trägerabbildung $supp : \mathrm{Spv}(B) \to \mathrm{Spec}(B)$ homöomorph zu $RZ(\mathrm{Quot}(B/\mathfrak{p}))$.
*Bemerkung: Mit Teil (b) gilt dann also für zwei Elemente $v, w \in \mathrm{Spv}(B)$ mit gleichem Träger $\mathfrak{p}$, dass $v \in \overline{\{w\}}$ genau dann wenn $R_v \subset R_w \subset \mathrm{Quot}(B/\mathfrak{p})$.*

**Aufgabe 4**. Begebe Dich auf Literaturrecherche und skizziere mit Quellenangaben einen Beweis dafür, dass es einen Homöomorphismus $RZ(\mathbb{C}(T), \mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ gibt.

---

Abgabe bis Freitag, 29.11.2019, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.