Adische Räume
Wintersemester 19/20

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Judith Ludwig

8. Übungsblatt

06.12.2019

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $v \in \mathrm{Spv}(K)$ eine nicht-triviale Bewertung mit Bewertungsring $R \subset K$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Es gibt eine Bewertung w von Rang 1, sodass w die selbe Topologie wie v auf K erzeugt.

(b) Es gibt ein topologisch nilpotentes Element ungleich Null in K.

(c) R hat ein Primideal von Höhe 1.

Wie in der Vorlesung definiert, heißt die Bewertung v mikrobiell, falls sie diese Bedingungen erfüllt.
Zeige: Falls v endlichen Rang hat, so ist v mikrobiell.

Hinweis zum Beweis der Äquivalenzen: Zeige (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).
Für (b) $\Rightarrow$ (c): Zeige hierzu zunächst, dass K ein Huber Ring mit Definitionspaar $(R, \varpi R)$ ist, wobei ϖ ein geeignetes topologisch nilpotentes Element ist. Sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal, welches minimal ist mit der Eigenschaft, dass $I \subset \mathfrak{p}$. Zeige, dass solch ein $\mathfrak{p}$ Höhe 1 hat.
(Hinweis zur letzten Behauptung: R ist I-adisch separiert, d.h. $\bigcap I^n = \{0\}$.)

Aufgabe 2. Seien A und B zwei Huber Ringe und $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass adische Morphismen stetig sind. Zeige am Beispiel $A = \mathbb{Z}_p$ und $B = \mathbb{Z}_p[[T]]$, dass die Umkehrung falsch ist.

(b) Zeige: f adisch $\Rightarrow$ f ist beschränkt (d.h. für jede beschränkte Teilmenge $T \subset A$ ist $f(T)$ beschränkt.)

(c) Zeige durch ein Beispiel, dass stetige Morphismen von Huber Ringen im Allgemeinen nicht beschränkt sind.

Bemerkung: Adische Morphismen bilden eine gute Klasse stetiger Morphismen, die Beschränktheit erhalten.

Aufgabe 3. Sei $f : A \to B$ ein stetiger Morphismus von Huber Ringen. Zeige: Ist A ein Tate Ring, so ist auch B ein Tate Ring und f ist adisch.

Abgabe bis Freitag, 13.12.2019, 12:00 Uhr in den Zettelkasten Nr. 26.