Algebra 2 **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 2 28.04.2020
Abgabe bis zum 05.05.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Projektive Moduln, 2+2 Punkte)**.** Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie:

(a) Für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

von R-Moduln ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(M, C)$$

exakt. Hierbei bezeichnen f_* und g_* die durch $f_*(\varphi) := f \circ \varphi$ und $g_*(\psi) := g \circ \psi$ gegebenen Abbildungen.

(b) M ist genau dann projektiv, wenn für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

von R-Moduln die Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(M, C) \longrightarrow 0$$

exakt ist. [Sie dürfen Teilaufgabe (a) verwenden]

Aufgabe 2 (Schlangenlemma, 2+3 Punkte)**.** Sei R ein Ring.

(a) Seien R-Moduln A und B gegeben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Sequenz $A \to B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn die Abbildung $A \to B$ surjektiv ist.

(ii) Die Sequenz $0 \to A \to B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn die Abbildung $A \to B$ ein Isomorphismus ist.

Anmerkungen: (1) Sie dürfen Aufgabe 6 (a) von Blatt 1 verwenden.
(2) Aus (ii) folgt: Ist $0 \to A \to 0$ exakt, so gilt $A = 0$.

(b) Seien in dem folgenden kommutativen Diagramm von R-Moduln die Zeilen exakt.

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass die folgende in der Vorlesung konstruierte Sequenz exakt ist:

$$\ker(\varphi_2) \longrightarrow \ker(\varphi_3) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\varphi_1)$$

Aufgabe 3 (5er-Lemma, 2+2+2 Punkte)**.** Sei R ein Ring und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_3"] & M_4 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi_4"] & M_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
N_1 \arrow[r, "r"] & N_2 \arrow[r, "s"] & N_3 \arrow[r, "t"] & N_4 \arrow[r, "u"] & N_5
\end{tikzcd}$$

von R-Moduln gegeben, in dem die Zeilen exakt sind. Weiterhin nehmen wir an, dass φ_2 und φ_4 Isomorphismen sind, φ_1 surjektiv und φ_5 injektiv ist. Die Aussage des *5er-Lemmas* ist, dass in dieser Situation φ_3 ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Gilt das 5er-Lemma unter der Annahmen, dass r injektiv und j surjektiv ist, so gilt es allgemein.

Einschränkung: Führen Sie nur den Reduktionsschritt auf r injektiv aus.

(b) Sei nun r injektiv. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & \operatorname{coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\varphi_2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "r"] & N_2 \arrow[r, "s"] & \operatorname{coker}(r) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

es hat exakte Zeilen und $\overline{\varphi_2}$ ist ein Isomorphismus. (Schlangenlemma!)

(c) Sei nun zusätzlich j surjektiv. Analog zu (b) kann man zeigen, dass die Abbildung $\underline{\varphi_4} : \ker(j) \to \ker(u), x \mapsto \varphi_4(x)$ wohl-definiert und ein Isomorphismus ist. (Dies ist nicht verlangt.)

Sind r injektiv und j surjektiv, so existiert ein Diagramm wie im Schlangenlemma mit den vertikalen Abbildungen $\overline{\varphi_2}$, φ_3 und $\underline{\varphi_4}$, und es gilt, dass φ_3 ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4 (Noethersche Ringe, 1+4 Punkte)**.** Zeigen Sie für den Teilring

$$R := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$

die nachfolgenden Aussagen:

(a) Der Ring R ist nicht rechtsnoethersch.

(b) Der Ring R ist linkssnoethersch.

Hinweis: Ist $I \subset R$ ein Linksideal, so überlege man, dass der Durchschnitt von I mit dem Linksideal $J = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ ist, und dass $(I+J)/J$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.