Algebra 2 **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 4 12.05.2020
Abgabe bis zum 19.05.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Morphismen, 1+1+2+1+2 Punkte)**.** Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:

(a) Ist f ein spaltender Epimorphismus, der ein Monomorphismus ist, so ist f ein Isomorphismus.

(b) Ist f ein spaltender Epimorphismus, dann ist $F(f)$ ein spaltender Epimorphismus.

(c) Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

   (i) f ist ein Isomorphismus.
   (ii) $f_* : \mathcal{C}(X, A) \to \mathcal{C}(X, B), g \mapsto f \circ g$ ist für alle Objekte $X \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$ eine Bijektion.
   (iii) $f^* : \mathcal{C}(B, X) \to \mathcal{C}(A, X), h \mapsto h \circ f$ ist für alle Objekte $X \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$ eine Bijektion.

Weiterhin:

(d) Finden Sie einen Funktor F und einen Epimorphismus e, sodass $F(e)$ kein Epimorphismus ist.

(e) Sei R ein Integritätsbereich und $S \subset R$ eine multiplikative Menge. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $R \to S^{-1}R$ ein Epimorphismus in der Kategorie der kommutativen Ringe ist.

Aufgabe 2 (Funktoren, 1+1+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zeigen Sie:

(a) Die Zuordnung $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \underline{\mathrm{Set}}, Y \mapsto h_X(Y) := \mathcal{C}(Y, X), h_X(f : Y \to Z) := f^*$ ist ein Funktor.

(b) Die Zuordnung $h : \mathcal{C} \to \mathsf{PSh}(\mathcal{C}), X \mapsto h_X, h(g : X_1 \to X_2) := h(g)$ mit $h(g)_Y := g_* : h_{X_1}(Y) \to h_{X_2}(Y)$ für alle $Y \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$ ist ein Funktor.

(c) Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Kategorienäquivalenz, so ist F volltreu und essentiell surjektiv.

Bemerkung: In (c) gilt auch die Umkehrung.

Aufgabe 3 (G-Mengen, 4 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe. Die Kategorie $G\text{-}\underline{\mathrm{Set}}$ der G-Mengen ist wie folgt definiert: Die Objekte sind Paare (X, m), wobei X eine Menge und $m : G \times X \to X$ eine Linkswirkung von G auf X ist. Die Morphismen $(X_1, m_1) \to (X_2, m_2)$ sind G-äquivariante Abbildungen $f : X_1 \to X_2$, das heißt Abbildungen, für die $f(m_1(g, x)) = m_2(g, f(x))$ für alle $g \in G$ und alle $x \in X_1$ gilt. Zeigen Sie: $G\text{-}\underline{\mathrm{Set}}$ ist äquivalent zu $\underline{\mathrm{Set}}^{\underline{G}}$, hierbei ist $\underline{G}$ die zu G assoziierte Kategorie aus der Vorlesung und $\underline{\mathrm{Set}}^{\underline{G}}$ die Funktorkategorie der Funktoren $\underline{G} \to \underline{\mathrm{Set}}$ mit natürlichen Transformationen als Morphismen.

Aufgabe 4 (Differenzkokerne, 2 Punkte)**.** Sei G eine Gruppe und $N \lhd G$ ein Normalteiler. Sei $1 : N \to G$ der triviale Homomorphismus und $i : N \to G$ die kanonische Inklusion. Zeigen Sie, dass G/N zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : G \to G/N$ der Differenzkokern der Abbildungen i und 1 in der Kategorie der Gruppen ist.

Aufgabe 5 (Halbgeordnete Mengen, 1+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Zeigen Sie:

(a) Auf der Menge $[\mathcal{C}]$ der Isomorphieklassen von Objekten in $\mathcal{C}$ definiert $[X] \leq [Y] :\Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{C}(X, Y)$ eine reflexive und transitive Relation.

(b) Enthält für je zwei Objekte X und Y in $\mathcal{C}$ die Morphismenmenge $\mathcal{C}(X, Y)$ höchstens ein Element, so ist $([\mathcal{C}], \leq)$ eine halbgeordnete Menge.