Algebra 2 — **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 — Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 6 — 02.06.2020
Abgabe bis zum 09.06.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Präadditive Kategorien, 3+3 Punkte)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ präadditive Kategorien. Zeigen Sie:

(a) Für ein Objekt T von $\mathcal{A}$ sind äquivalent:

   (i) T ist initial.
   (ii) T ist terminal.
   (iii) $\mathcal{A}(T, T)$ ist eine triviale Gruppe.
   (iv) 1_T ist das neutrale Element der Gruppe $\mathcal{A}(T, T)$.

(b) Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ein additiver Funktor.

   (i) Ist 0 ein Nullobjekt in $\mathcal{A}$, so ist $F0$ ein Nullobjekt in $\mathcal{A}'$.
   (ii) Seien X, Y Objekte von $\mathcal{A}$ und sei $X \xrightarrow{i_X} X \oplus Y \xleftarrow{i_Y} Y$ ein Koprodukt von X und Y in $\mathcal{A}$. Dann ist $FX \xrightarrow{F(i_X)} F(X \oplus Y) \xleftarrow{F(i_Y)} FY$ ein Koprodukt von FX und FY in $\mathcal{A}'$.

Aufgabe 2 (Torsionsfreie abelsche Gruppen, 2+2+2+2 Punkte)**.** Sei $\underline{\mathrm{Ab}}$ die präadditive Kategorie der abelschen Gruppen mit Gruppenhomomorphismen und $\underline{\mathrm{Ab}}^0$ die volle Unterkategorie der torsionsfreien abelschen Gruppen. Für eine abelsche Gruppe A sei $\overline{A} := A/\mathrm{tors}(A)$ der Quotient von A nach ihrer Torsionsuntergruppe $\mathrm{tors}(A) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : na = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Kategorie $\underline{\mathrm{Ab}}^0$ ist eine additive Kategorie.

(b) Für einen Morphismus $f : A \to B$ in $\underline{\mathrm{Ab}}$ gelten:

   (i) Die Inklusionsabbildung $\ker(f) \to A$ ist ein Kern von f in $\underline{\mathrm{Ab}}$.
   (ii) Die Faktorabbildung $B \to \mathrm{coker}(f)$ ist ein Kokern von f in $\underline{\mathrm{Ab}}$.

   Hierbei seien $\ker(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, $\mathrm{im}(f) := \{f(a) \mid a \in A\}$, $\mathrm{coker}(f) := B/\,\mathrm{im}(f)$.

(c) Für einen Morphismus $f : A \to B$ in $\underline{\mathrm{Ab}}^0$ gelten:

   (i) Die Inklusionsabbildung $\ker^0(f) \to A$ ist ein Kern von f in $\underline{\mathrm{Ab}}^0$.
   (ii) Die Verkettung von Faktorabbildungen $B \to \mathrm{coker}(f) \to \overline{\mathrm{coker}(f)}$ ist ein Kokern von f in $\underline{\mathrm{Ab}}^0$.

(d) Die Kategorie $\underline{\mathrm{Ab}}^0$ ist keine abelsche Kategorie.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der Epi-Mono-Faktorisierung, 2+2+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, seien $a : A \to B$ ein Epimorphismus und $b : B \to C$ ein Monomorphismus in $\mathcal{A}$ und sei $f = b \circ a$. Sei

$$A \xrightarrow{c} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{d} C$$

die kanonische Faktorisierung von f aus der Vorlesung. Zeigen Sie ohne Verwendung von Aussagen ab Nr. 62 aus der Vorlesung:

(a) $\ker(a) \cong \ker(f)$.

(b) $\mathrm{coker}(b) \cong \mathrm{coker}(f)$.

(c) Es gibt genau einen Morphismus $\zeta : B \to \mathrm{im}(f)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, dotted, "\zeta"] & C \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_C"] \\ A \arrow[r, "c"] & \mathrm{im}(f) \arrow[r, "d"] & C \end{tikzcd}$$

und ζ ist ein Isomorphismus. **b.w.**

Bonusaufgabe 4 (Lokalisierung und Tensorprodukt, 2+2 Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge mit $1 \in S$. Sei M ein R-Modul und N ein $S^{-1}R$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Die folgende Abbildung ist ein Homomorphismus abelscher Gruppen:

$$j_{M,N} : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M,N), f \mapsto (S^{-1}f : \tfrac{m}{s} \mapsto \tfrac{1}{s} \cdot f(m))$$

(b) Die Abbildung $S^{-1}R \times M \to S^{-1}M, (\frac{r}{s}, m) \mapsto \frac{rm}{s}$ ist R-balanciert und die induzierte Abbildung

$$S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M$$

ist ein $S^{-1}R$-Modul-Isomorphismus.

Bemerkung: $j_{\cdot,\cdot}$ ist ein natürlicher Isomorphismus und zeigt, dass der Lokalisierungsfunktor $S^{-1}(-) : {}_R\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_{S^{-1}R}\underline{\mathrm{Mod}}$ linksadjungiert zum Vergissfunktor ${}_{S^{-1}R}\underline{\mathrm{Mod}} \to {}_R\underline{\mathrm{Mod}}$ ist.