

Übungsblatt 7

09.06.2020

Abgabe bis zum 16.06.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Funktorialität von Kern- und Kokernbildung, 2 Punkte). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Wir wissen bereits, dass wir es zu einem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \longrightarrow \operatorname{coker}(f) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow g & & \downarrow g' \\ 0 & \longrightarrow & \ker(f') & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f'} & D \longrightarrow \operatorname{coker}(f') \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen ergänzen können. Zeigen Sie, dass es eindeutige Morphismen g_0 und g_1 gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \longrightarrow \operatorname{coker}(f) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_0 & & \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow g_1 \\ 0 & \longrightarrow & \ker(f') & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f'} & D \longrightarrow \operatorname{coker}(f') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Bemerkung: Die Funktorialität kann tatsächlich durch einen Funktor ausgedrückt werden. Kern und Kokern lassen sich als additive Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ auffassen. Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}^{\rightarrow}$ die Pfeilkategorie von $\mathcal{A}$.

Aufgabe 2 (Eine abelsche Funktorkategorie, 4+2 Punkte). Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

- Sei $\mathcal{A}'$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$, sodass insbesondere $\mathcal{A}'$ eine prä-additive Kategorie und der Inklusionsfunktor $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ additiv ist. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:
 - $\mathcal{A}'$ ist abelsch und der Inklusionsfunktor $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ ist exakt.
 - $\mathcal{A}'$ besitzt ein Nullobjekt, je zwei Objekte A, B aus $\mathcal{A}'$ besitzen ein Produkt in $\mathcal{A}'$ und für alle f aus $\operatorname{Mor} \mathcal{A}'$ existieren die in $\mathcal{A}$ gebildeten Pfeile $\ker(f)$ und $\operatorname{coker}(f)$ bereits in $\operatorname{Mor} \mathcal{A}'$; letzteres bedeutet, dass es $g, h \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}'$ gibt, so dass $g \simeq \ker(f)$ und $h \simeq \operatorname{coker}(f)$ in $\mathcal{A}$ gilt.
- Sei $\mathcal{J}$ eine kleine prä-additive Kategorie und $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Zeigen Sie, dass die volle Unterkategorie $\underline{\operatorname{Add}}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ von $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$, die aus additiven Funktoren besteht abelsch ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ abelsch ist und Limiten und Kolimiten in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ punktweise gegeben sind.

Aufgabe 3 (Filtrierte Kategorien, 2+2+2 Punkte). Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge. Das heißt: X ist eine Menge und $\leq$ ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation auf X , sodass für alle $x, y \in X$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Sei $\mathcal{J}$ eine Kategorie mit $\operatorname{Ob} \mathcal{J} := X$ und $\# \mathcal{J}(x, y) = 1$, falls $x \leq y$ und $\mathcal{J}(x, y) = \emptyset$ sonst.

- Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, für $\mathcal{J}$ die Komposition von Morphismen zu definieren und, dass $\mathcal{J}$ filtriert ist. Die Kategorie $\mathcal{J}^{\operatorname{op}}$ ist also kofiltriert.

Sei nun $(X, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathcal{J}$ die zugehörige filtrierte Kategorie aus (a).

- Für einen $\mathbb{Z}$ -Modul A definieren wir das Diagramm $D : \mathcal{J} \rightarrow \underline{\operatorname{Mod}}_{\mathbb{Z}}$ durch

$$D(n) = A \quad \text{und} \quad D(n \rightarrow n+1) : A \rightarrow A, a \mapsto n \cdot a \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie $\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D \cong S^{-1}A$.

(c) Wir betrachten in $\underline{\mathbf{Ab}}^{\mathcal{J}^{\text{op}}}$ die folgende kurze exakte Sequenz von Diagrammen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 7} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 7} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 7} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Wir schreiben kurz

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\cdot 7} A_{\bullet} \longrightarrow B_{\bullet} \longrightarrow 0$$

mit $A_i = \mathbb{Z}$ und $B_i = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{\mathcal{J}^{\text{op}}} A_{\bullet} = 0$ und $\lim_{\mathcal{J}^{\text{op}}} B_{\bullet} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gelten, und folgern Sie dass der Funktor $\lim : \underline{\mathbf{Ab}}^{\mathcal{J}^{\text{op}}} \rightarrow \underline{\mathbf{Ab}}$ nicht exakt ist.

Bemerkung: Die Bildung in 3(a) ist eine Art Umkehrung von Aufgabe 5 auf Blatt 4: Die halbgeordnete Menge $([\mathcal{J}], \leq)$ ist total geordnet und isomorph zu $(X, \leq)$.

Aufgabe 4 (Konstruktion filtrierter Kolimiten von Moduln, 2+2+2 Punkte). Sei $\mathcal{J}$ eine kleine filtrierte Indexkategorie, R ein Ring und $D : \mathcal{J} \rightarrow {}_R\mathbf{Mod}$ ein Diagramm. Seien die $D(j)$, $j \in \text{Ob } \mathcal{J}$, ohne Einschränkung paarweise disjunkte Mengen. Sei

$$M_D := \bigsqcup_{j \in \text{Ob } \mathcal{J}} D(j)$$

in $\mathbf{Set}$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $D(j)$, $j \in \text{Ob } \mathcal{J}$. Für $i, j \in \text{Ob } \mathcal{J}$ und $d_i \in D(i)$, $d_j \in D(j)$, definiert man

$$d_i \sim_D d_j \iff \exists f : i \rightarrow j, g : j \rightarrow k \in \text{Mor } \mathcal{J} \text{ mit } D(f)(d_i) = D(g)(d_j) \in D(k).$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation auf M_D . Auf der Menge $U_D := M_D / \sim_D$ der Äquivalenzklassen $[d]$, $d \in M_D$, definiert man eine Addition und eine Skalarmultiplikation mit R durch

$$[d_i] + [d_j] = [D(f)d_i + D(g)d_j] \quad \text{und} \quad r[d_i] = [rd_i]$$

für $i, j \in \text{Ob } \mathcal{J}$ und $d_i \in D(i)$, $d_j \in D(j)$ und Pfeile $f, g \in \text{Mor } \mathcal{J}$ mit $\text{dom}(f) = i$ und $\text{dom}(g) = j$, so dass $\text{cod}(f) = \text{cod}(g)$, und für $r \in R$. Es darf im Weiteren ohne Beweis angenommen werden, dass U_D und diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, dass U_D vermöge dieser Verknüpfungen ein R -Modul ist, und dass die Abbildungen $\iota_i : D(i) \rightarrow U_D$, $d_i \mapsto [d_i]$ R -linear sind. Zeigen Sie:

- (a) U_D ist zusammen mit den Homomorphismen $\iota_j : D(j) \rightarrow U_D$, $j \in \text{Ob } \mathcal{J}$ ein Kolimes von D .
- (b) Eine Klasse $[d_i]$ für $i \in \text{Ob } \mathcal{J}$ und $d_i \in D(i)$ ist genau dann die 0 in U_D , wenn ein Pfeil $f : i \rightarrow j$ in $\mathcal{J}$ existiert mit $D(f)d_i = 0$ in $D(j)$.
- (c) Ein Morphismus $\varphi : D \rightarrow D'$ von Diagrammen induziert eine Abbildung $\varphi_* : M_D \rightarrow M_{D'}$ in $\mathbf{Set}$. Es gilt $[d] \sim_D [d'] \Rightarrow \varphi_*(d) \sim_{D'} \varphi_*(d')$. Die induzierte Abbildung $U_D \rightarrow U_{D'}$ ist R -linear und stimmt mit der durch die universelle Eigenschaft des Kolimes induzierten Abbildung $\text{colim } D \rightarrow \text{colim } D'$ überein.

Bemerkung: Aus der Konstruktion von U_D und Aufgabe 4(a) folgt, dass für filtrierte $\mathcal{J}$ der Vergissfunktor ${}_R\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ mit colim kommutiert.