Algebra 2 **Universität Heidelberg**
SoSe 2020 Prof. Dr. Gebhard Böckle
Julian Quast

Übungsblatt 8 16.06.2020
Abgabe bis zum 23.06.2020 um 09:00 Uhr

Aufgabe 1 (Ein Rechtsadjungierter des Vergissfunktors, 2+2+2+2 Punkte)**.** Sei R ein Ring, $F : \underline{\mathrm{Mod}}_R \to \underline{\mathrm{Ab}}$ der Vergissfunktor von der Kategorie der R-Rechtsmoduln in die Kategorie der abelschen Gruppen, der einem Modul die ihm unterliegende abelsche Gruppe zuordnet. Sei weiterhin $G := \underline{\mathrm{Ab}}(R, -) : \underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Mod}}_R$, wobei R hier R als R-Linksmodul (bzw. abelsche Gruppe) bezeichnet. Für alle abelschen Gruppen A, Homomorphismen $f : R \to A$, $a \in R$ und $x \in R$ sei $(fa)(x) := f(ax)$. Zeigen Sie:

(a) Die beschriebene Abbildung $\underline{\mathrm{Ab}}(R, A) \times R \to \underline{\mathrm{Ab}}(R, A)$ definiert eine R-Rechtsmodulstruktur auf $\underline{\mathrm{Ab}}(R, A)$.

(b) Für jeden R-Rechtsmodul M und jede abelsche Gruppe A gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\underline{\mathrm{Mod}}_R(M, GA) \cong \underline{\mathrm{Mod}}_R(FM, A)$. Insbesondere ist F linksadjungiert zu G. (Erklären Sie welche Natürlichkeitsbedingungen für die Adjunktion nötig sind. Sie brauchen diese Natürlichkeiten nicht nachrechnen.)

(c) Der Funktor F ist exakt und treu ist.

(d) Der R-Modul $\underline{\mathrm{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist ein injektiver Koerzeuger von $\underline{\mathrm{Mod}}_R$.

Hinweis zu (b): Das ist ein Spezialfall der $\otimes$-Hom-Adjunktion.
Hinweis zu (d): Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein injektiver Koerzeuger von $\underline{\mathrm{Ab}}$ ist.

Aufgabe 2 (Produkte von Injektiven, 2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, J eine Menge und $(I_j)_{j\in J}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{A}$, so dass $\prod_{j\in J} I_j$ in $\mathcal{A}$ existiert. Zeigen Sie: Sind die I_j für alle $j \in J$ injektiv in $\mathcal{A}$, so ist $\prod_{j\in J} I_j$ injektiv in $\mathcal{A}$.

Hinweis: Das Objekt $\prod_{j\in J} I_j$ repräsentiert den Funktor $\prod_{j\in J} \mathcal{A}(-, I_j)$. Verwenden Sie aus der Vorlesung, dass $\prod_{j\in J} : \underline{\mathrm{Ab}}^J \to \underline{\mathrm{Ab}}$ ein exakter Funktor ist.

Aufgabe 3 (Ketten und Koketten, 2+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, seien $C = (C^\bullet, d^\bullet)$ und D Kokettenkomplexe über $\mathcal{A}$ und sei $f = f^\bullet : C \to D$ ein Morphismus von Kokettenkomplexen.

(a) Definiere $C_i := C^{-i}$ und $d_i := d^{-i}$, sowie $f_i := f^{-i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass der Funktor $\underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A}) \to \underline{\mathrm{Ch}}_*(\mathcal{A}), (C^\bullet, d^\bullet) \mapsto (C_\bullet, d_\bullet),\ f^\bullet \mapsto f_\bullet$, wohldefiniert und ein Kategorienisomorphismus ist.

(b) Definiere $\widehat{C}^i := C^{-i}$ als Objekt in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ und $\widehat{d}^i := d^{-i-1}$ als Morphismus $\widehat{C}^i \to \widehat{C}^{i+1}$ in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $(C^\bullet, d^\bullet) \mapsto (\widehat{C}^\bullet, \widehat{d}^\bullet)$, ergänzt um eine passende Abbildung für Morphismen, einen Kategorienisomorphismus $\underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}), (C^\bullet, d^\bullet) \mapsto (\widehat{C}^\bullet, \widehat{d}^\bullet)$ definiert.

Aufgabe 4 (Totalkomplexe, 1+3+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $\underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A})$ die Kategorie der beschränkten Doppelkomplexe über $\mathcal{A}$. Für $C \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A})$ und $f \in \mathrm{Mor}\,\underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A})$ seien $\mathrm{Tot}(C)$ und $\mathrm{Tot}(f)$ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Bildung des Totalkomplexes $\mathrm{Tot} : \underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A}) \to \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})$ ist ein additiver Funktor.

(b) Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so ist $\mathrm{Tot} : \underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A}) \to \underline{\mathrm{Ch}}^*(\mathcal{A})$ exakt.

(c) Für einen Morphismus $f = f^\bullet : (C^\bullet, d_C^\bullet) \to (D^\bullet, d_D^\bullet)$ von Kokettenkomplexen über $\mathcal{A}$ sei C_f der Doppelkomplex $(C_f^{pq}, d_v^{pq}, d_h^{pq})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ in $\underline{\mathrm{Ch}}_b^{**}(\mathcal{A})$ definiert durch

$$C_f^{pq} := \begin{cases} C^q, & p = -1, \\ D^q, & p = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad d_v^{pq} := \begin{cases} d_C^q, & p = -1, \\ d_D^q, & p = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad d_h^{pq} := \begin{cases} f^q, & p = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tot}(C_f)$ isomorph zum Komplex $\mathrm{Cone}(f)$ aus der Vorlesung ist.

Hinweis: In Aufgabe 4 dürfen Sie für die Lösung gerne $\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Mod}}_R$ annehmen.