Proseminar p-adische Analysis

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Peter Gräf

Sommersemester 2016, Dienstag 14.00 Uhr–16.00 Uhr

Motivation und Ziele des Proseminars

Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann bezüglich verschiedener Absolutbeträge vervollständigt werden. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entstehen durch Vervollständigung bezüglich des Standardabsolutbetrages und ihre Topologie und Analysis sind Gegenstand der Vorlesung Analysis 1. In diesem Proseminar wollen wir die Vervollständigung der rationalen Zahlen bezüglich des p-adischen Absolutbetrags betrachten, welche man als *p-adische Zahlen* $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet. Hierbei bezeichnet $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Die Topologie dieser Körper unterscheidet sich sehr stark von der reellen, so ist z.B. jeder Punkt in einem offenen Ball Mittelpunkt dieses Balles und jedes Dreieck ist gleichschenklig. Die fundamentale Bedeutung der p-adischen Zahlen für die Zahlentheorie wird im Henselschen Lemma deutlich, welches uns ein einfaches und effektives Kriterium zur Lösung von Diophantischen Gleichungen liefert.
Im ersten Teil des Proseminars wollen wir zunächst allgemeine Absolutbeträge auf Körpern betrachten und den p-adischen Absolutbetrag als Beispiel eines ultrametrischen Betrages einführen. Nachdem wir die ultrametrische Topologie allgemein untersucht haben, zeigt uns der Satz von Ostrowski, dass die p-adischen Absolutbeträge neben dem Standardabsolutbetrag (bis auf Äquivalenz) die einzigen nicht-trivialen Beträge auf $\mathbb{Q}$ sind. Dadurch motiviert wollen wir $\mathbb{Q}_p$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruieren und genauer untersuchen. Als erstes großes Ergebnis wollen wir das Henselsche Lemma beweisen und einen Ausblick in die sogenannten Lokal–Global–Prinzipen geben, die die zahlentheoretische Bedeutung der p-adischen Zahlen manifestieren.
Im zweiten Teil des Proseminars wenden wir uns der p-adischen Analysis zu. Zunächst wollen wir wie in der klassischen Analysis Folgen, Reihen und den Begriff der Differenzierbarkeit einführen. Auch wenn die Definitionen denen aus der reellen Analysis gleichen, werden wir viele neue Phänomene beobachten, beispielsweise werden wir sehen, dass eine p-adische Reihe *genau dann* konvergiert, wenn ihre Koeffizienten eine Nullfolge bilden. Im Anschluss daran werden wir Potenzreihen betrachten und das Nullstellenverhalten der durch diese definierten Funktionen untersuchen. Im Zuge dessen werden wir den Satz von Strassman beweisen. Zum Abschluss des Proseminars wenden wir uns der Approximation stetiger Funktionen und dem Studium des p-adischen Logarithmus und der p-adischen Exponentialfunktion zu, welche es uns ermöglichen die Einheitengruppe der ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ besser zu verstehen.

Organisatorisches

- *Vorbesprechung:* **Dienstag, den 09.02.2016 um 11 Uhr c.t. ins Hörsaal 2 in INF 288**
- *Voraussetzungen:* Erfolgreiche Teilnahme an den Vorlesungen Analysis 1 und Lineare Algebra 1
- *Homepage:* `https://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/home/`
- Spätestens zwei Wochen vor dem eigenen Vortrag oder generell bei Verständnisfragen in die Sprechstunde kommen (Peter Gräf: Donnerstag, 14.00 Uhr–16.00 Uhr)

Teil I: Die p-adischen Zahlen

Der erste Teil des Proseminars widmet sich der algebraischen Seite der p-adischen Zahlen. Alle Vorträge in diesem Abschnitt basieren im Wesentlichen auf [Gou97, Kapitel 2 und 3]. Die anderen angegebenen Quellen sind lediglich als Ergänzung zu betrachten.

Vortrag 1 (Absolutbeträge auf Körpern)**.**
Wir beginnen mit der Definition von allgemeinen Absolutbeträgen und führen den p-adischen Absolubetrag ein. Nachdem wir gezeigt haben, dass dieser nicht-archimedisch ist, wenden wir uns Eigenschaften allgemeiner Absolutbeträge zu und zeigen verschiedene Kriterien für die Eigenschaft eines Absolutbetrages nicht-archimedisch zu sein.
Literatur: [Gou97, §2.1–2.2], eine sehr kompakte Darstellung findet sich auch in [Rob00, §2.1.3]
Datum: 19. April 2016 **Vortragender: Jonathan S.**

Vortrag 2 (Ultrametrische Topologie und Bewertungsringe)**.**
In diesem Vortrag wollen wir die ultrametrische Topologie genauer untersuchen. Zunächst wird die zu einem Absolutbetrag gehörige Metrik definiert. Anschließend werden wir zeigen, dass in ultrametrischen Räumen alle Dreiecke gleichschenklig sind und und alle Punkte innerhalb eines offenen (oder abgeschlossenen) Balles Mittelpunkte dieses Balles sind. Außerdem sehen wir das ultrametrische Räume total unzusammenhängend sind. Wir wollen diesen Vortrag mit der Definition des Bewertungsringes und des Restklassenkörpers eines Körpers mit nicht-arschimedischer Bewertung beschließen und diese für den p-adischen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ explizit bestimmen. Dafür führen wir die Begriffe des kommutativen Ringes und des maximalen Ideales ein und zeigen, dass der Quotient eines kommutativen Ringes bezüglich eines maximalen Ideals ein Körper ist. Allgemein bietet es sich in diesem Vortrag an vielen Stellen an, auf die vielen Unterscheide zur von $\mathbb{R}$ bekannten Topologie hinzuweisen.
Literatur: [Gou97, §2.3–2.4], die benötigten Definitionen und Aussagen über Ringe finden sich in [Lan05, §2.1–2.2]
Datum: 26. April 2016 **Vortragender: Jakob S.**

Vortrag 3 (Der Satz von Ostrowski und die Produktformel)**.**
Nachdem wir neben dem Standardabsolutbetrag nun die p-adischen Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ kennengelernt haben, ist es naheliegend sich zu fragen, ob es noch weitere interessante Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ gibt. Der Satz von Ostrowski zeigt uns, dass wir in der Tat keine weiteren interessanten Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ finden können. Zur Formulierung dieses Satzes müssen wir zunächst den Begriff der Äquivalenz zwischen zwei Absolutbeträgen einführen und auf verschiedene Arten charakterisieren. Nachdem wir mit diesen Hilfsmitteln den Satz von Ostrowski bewiesen haben, wollen wir noch die sogenannten Produktformel beweisen, die uns zeigt, dass wir, sofern wir alle bis auf einen Absolutbetrag einer rationalen Zahl kennen, auch den fehlenden bestimmen können. Dieses Prinzip stellt sich in vielen weiterführenden Anwendungen als erstaunlich wichtig heraus.
Literatur: [Gou97, §3.1], eine alternative Darstellung findet sich in [Kat07, §1.8]
Datum: 3. Mai 2016 **Vortragender: Dominik S.**

Vortrag 4 (Die Konstruktion von $\mathbb{Q}_p$)**.**
Durch die Ergebnisse aus dem vorherigen Vortrag motiviert wollen wir nun den Körper den p-adischen Zahlen analog zum Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des p-adischen Absolutbetrages konstruieren. Zunächst führen wir den Begriff der Cauchy-Folge ein und definieren damit den Begriff der Vollständigkeit. Wir zeigen, dass $\mathbb{Q}$ bezüglich des p-adischen Absolutbetrages nicht vollständig ist. Um eine Vervollständigung zu konstruieren, zeigen wir, dass die Menge aller Cauchy-Folgen bezüglich dieses Absolutbetrages einen kommutativen Ring mit Eins bilden und die Nullfolgen ein maximales Ideal in diesem Ring sind. Der entsprechende Quotient ist dann der Körper der p-adischen Zahlen. Nachdem wir gezeigt haben, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt, beschließen wir den Vortrag, indem wir zeigen, das die Vervollständigung eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist. Dies erlaubt es uns die obige Konstruktion direkt wieder zu vergessen und nur mit den formalen Eigenschaften der Vervollständigung zu arbeiten.
Literatur: [Gou97, §3.2]
Datum: 17. Mai 2016 **Vortragende: Jacqueline W. & Lisa-Marie N.**

Vortrag 5 (Grundlegende Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$).
Unser erstes Ziel ist es den Körper $\mathbb{Q}_p$ etwas besser zu verstehen. Zunächst definieren wir den Ring der ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ als den entsprechenden Bewertungsring aus Vortrag 2. Unser Hauptziel ist es für Elemente aus $\mathbb{Q}_p$ eine einfache Darstellung zu finden, mit der wir gut rechnen können und die Topologie von $\mathbb{Q}_p$ besser zu verstehen. Als Erstes zeigen wir, dass es dafür genügt mit $\mathbb{Z}_p$ zu arbeiten. Wir sehen, dass wir $\mathbb{Z}_p$ durch sehr spezielle Cauchy-Folgen beschreiben können und erhalten so die Beschreibung von $\mathbb{Z}_p$ als Potenzreihen in p mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Die algebraische Formulierung in [Gou97, Proposition 3.3.9] soll hierbei der Quelle folgend nur grob erläutert werden. Wir beenden diesen Vortrag mit der Definition der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_p$.
Literatur: [Gou97, §3.3]
Datum: 24. Mai 2016 **Vortragende: Anita U. & Marija M.**

Vortrag 6 (Das Henselsche Lemma).
In diesem Vortrag wollen wir die wohl wichtigste algebraische Eigenschaft der p-adischen Zahlen beweisen, das sogenannte Henselsche Lemma. Zur Formulierung benötigen wir die aus der Linearen Algebra bekannten Polynomringe. Zunächst beweisen wir die klassische Version des Henselschen Lemmas und wenden diese an um einige wichtige algebraische Eigenschaften von $\mathbb{Q}_p$ zu zeigen. Hierbei fällt uns zum ersten Mal auf, dass der Fall $p = 2$ an einigen Stellen gesondert zu betrachten ist. Die für diesen Fall benötige allgemeinere Aussage muss nicht bewiesen werden. Zum Abschluss des Vortrages formulieren und beweisen wir noch eine deutlich allgemeinere Version des Henselschen Lemmas.
Literatur: [Gou97, §3.4], eine alternative Darstellung findet sich in [Kat07, §1.7]
Datum: 31. Mai 2016 **Vortragende: Julian H. & Lukas B.**

Vortrag 7 (Lokal–Global–Prinzipien).
Zum Abschluss des ersten Teiles des Proseminars wollen wir einen Ausblick in die zahlentheoretische Bedeutung der p-adischen Zahlen geben. Wir beginnen mit einer ersten elementaren Aussage um der Idee der Lokal–Global-Prinzipien näher zu kommen. Anschließend formulieren wir ohne Beweis den Satz von Hasse-Minkowski, der uns zeigt, dass das erhoffte Prinzip in der Tat in einem sehr allgemeinen Rahmen funktioniert. In der verbleibenden Zeit wollen wir mit Hilfe des Henselschen Lemmas den Satz von Hasse-Minkowski auf die sogenannte Fermat-Gleichung anwenden um uns dessen tiefe Bedeutung eindrucksvoll vor Augen zu führen.
Literatur: [Gou97, §3.5]
Datum: 7. Juni 2016 **Vortragende: Levin M. & Tim H.**

Teil II: p-adische Analysis

Im zweiten Teil des Proseminars beschäftigen wir uns mit der Analysis in $\mathbb{Q}_p$. Die Vorträge 8 bis 11 folgen hauptsächlich [Gou97, Kapitel 4]. Für die Vorträge 12 und 13 ist [Kat07, Kapitel 4] die Hauptreferenz. Der letzte Vortrag basiert auf [Kob84, §IV.2].

Vortrag 8 (Elementare Analysis in $\mathbb{Q}_p$).
Wie in der reellen Analysis betrachten wir zunächst Folgen und Reihen über $\mathbb{Q}_p$. Die Eigenschaft des p-adischen Absolutbetrages nicht-archimedisch zu sein erweist sich hierbei als sehr nützlich, so erhalten wir z.B. dass eine Reihe über $\mathbb{Q}_p$ genau dann konvergiert wenn ihre Koeffizienten eine Nullfolge bilden. Anschließend führen wir die Begriffe der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen ein und wollen verstehen, warum die Ableitung in der p-adischen Analysis eine viel kleinere Rolle als in der reellen Analysis spielt. Dies wird besonders dadurch deutlich, dass der Mittelwertsatz über $\mathbb{Q}_p$ nicht mehr gültig ist. Man sollte in diesem Vortrag zum besseren Verständnis einige zusätzliche Beispiele geben. Dabei bieten sich [Kat07, Beispiel 4.2 und Beispiel 4.26] an.
Literatur: [Gou97, §4.1–4.2] und [Kat07, Beispiel 4.2 und Beispiel 4.26]
Datum: 14. Juni 2016 **Vortragende: Berinike T.**

Vortrag 9 (Potenzreihen I)**.**
Im vorherigen Vortrag haben wir gesehen, dass es über $\mathbb{Q}_p$ nicht sehr sinnvoll erscheint mit allgemeinen differenzierbaren Funktionen zu arbeiten. Stattdessen konzentrieren wir uns auf Potenzreihen und die durch diese definierten Funktionen, welche in der Theorie über $\mathbb{Q}_p$ eine Schlüsselrolle einnehmen. Wie in der reellen Analysis wollen wir zunächst den Konvergenzbereich einer solchen Reihe untersuchen und sehen, dass dieser durch den Konvergenzradius beschrieben werden kann. Das Verhalten auf dem Rand ist hierbei deutlich einfacher zu verstehen als in der klassischen Theorie. Nachdem wir Summen und Produkte von Potenzreihen untersucht haben, wollen wir uns mit deren Verkettung beschäftigen. Es stellt sich hierbei heraus, dass man sehr sorgfältig arbeiten muss um sicherzustellen, dass diese Verkettung der Verkettung der entsprechenden Abbildungen entspricht.
Literatur: [Gou97, §4.3]
Datum: 21. Juni 2016 **Vortragende: Carla S. & Jonas M.**

Vortrag 10 (Potenzreihen II)**.**
Im zweiten Vortrag über Potenzreihen schließen wir direkt an den ersten Teil an und wollen uns mit den durch Potenzreihen definierten Abbildungen beschäftigen. Wir sehen zunächst, dass diese Funktionen stetig sind. Anschließend untersuchen wir, was passiert, wenn man den Entwicklungspunkt einer Potenzreihe innerhalb des Konvergenzbereiches ändert. Im Gegensatz zur reellen Analysis stellt sich heraus, dass der Konvergenzbereich sich hierbei nicht verändert und diese Methodik somit nicht zur analytischen Fortsetzung von Potenzreihen verwendet werden kann. Weiterhin beweisen wir den Identitätssatz für Potenzreihen und untersuchen deren Differenzierbarkeit. Hierbei muss kurz die formale Ableitung einer Potenzreihe eingeführt werden, siehe dazu [Gou97, Problem 149]. Im letzten Abschnitt des Vortrages untersuchen wir das Nullstellenverhalten und beweisen den Satz von Strassman, der uns für Potenzreihen auf $\mathbb{Z}_p$ eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen liefert. Die Bedeutung dieses Satzes wird in den vielen Korollaren deutlich, die wir im Anschluss beweisen können.
Literatur: [Gou97, §4.4]
Datum: 28. Juni 2016 **Vortragender: Tobias R.**

Vortrag 11 (Der p-adische Logarithmus und die p-adische Exponentialfunktion)**.**
Nach dem detaillierten Studium von allgemeinen Potenzreihen wollen wir nun die wichtigsten Potenzreihen aus der klassischen Theorie auch über $\mathbb{Q}_p$ untersuchen. Zunächst definieren wir den p-adischen Logarithmus über seine klassische Potenzreihenentwicklung und berechnen den Konvergenzradius. Weiterhin verwenden wir den Logarithmus um die Existenz von Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}_p$ mit den Vorarbeiten aus Vortrag 6 abschließend zu untersuchen. Als nächstes wenden wir uns der p-adischen Exponentialfunktion zu. Hierbei stellt sich heraus, dass der Konvergenzbereich viel kleiner ist als wir aus der reellen Analysis gewohnt sind. Wir untersuchen auf welchen Bereichen Logarithmus und Exponentialfunktion invers zu einander sind und verwenden diese Kenntnis um den Vortrag mit der expliziten Beschreibung der Einheitengruppe $\mathbb{Z}_p^\times$ in [Gou97, Korollar 4.5.10] zu beenden.
Literatur: [Gou97, §4.5]
Datum: 5. Juli 2016 **Vortragende: Max S. & Valentin S.**

Vortrag 12 (Gleichmäßig stetige Funktionen)**.**
Im letzten Teil des Proseminars interessieren wir uns für Interpolationsprobleme. Um diese zu verstehen, benötigen wir den Begiff der gleichmäßig stetigen Funktion und müssen deren Eigenschaften untersuchen. Zunächst definieren wir [Kat07, Definition 4.1] folgend gleichmäßig stetige Funktionen auf $\mathbb{Z}_p$. Wir zeigen, dass lokal konstante Funktionen gleichmäßig stetig sind und finden eine Charakterisierung von gleichmäßig stetigen Funktionen mit Hilfe von Treppenfunktionen. Unser wichtigstes Ergebnis ist die Tatsache, dass sich gleichmäßig stetige Funktionen auf einer Teilmenge von $\mathbb{Z}_p$ eindeutig stetig und beschränkt auf deren Abschluss fortsetzen lassen. Dies bildet die Grundlage für den nächsten Vortrag.
Literatur: [Kat07, §4.1–4.2]
Datum: 12. Juli 2016 **Vortragende: Andreas G. & Philipp D.**

Vortrag 13 (Interpolationsreihen)**.**
Uns interessiert die Frage wie wir Folgen von p-adischen Zahlen interpolieren können. Aus dem vorherigen Vortrag sehen wir, dass dies immer dann funktioniert, wenn die entsprechende Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_p$ gleichmäßig stetig ist. Unser Hauptziel ist es eine explizite Reihendarstellung für die interpolierende Funktion zu finden. Dazu führen wir Interpolationskoeffizienten und Interpolationsreihen ein und beweisen den Satz von Mahler, der uns zeigt, dass die Interpolationsreihe die gewünschte Reihendarstellung liefert. Als abschließende Anwendung wollen wir mit diesen Hilfsmitteln allgemeine p-adische Exponentialfunktionen konstruieren und die Beziehung zur p-adischen Exponentialfunktion aus Vortrag 11 untersuchen.
Literatur: [Kat07, §4.6]
Datum: 19. Juli 2016 **Vortragende: Daniela S. & Lukas S.**

Vortrag 14 (Die p-adische Gammafunktion)**.**
Im letzten Vortrag wollen wir noch eine weitere Anwendung der Interpolationstheorie aus den vorherigen Vorträgen geben: Die Konstruktion der p-adischen Gammafunktion. Wir führen zunächst [For11, S. 234ff] folgend die reelle Gammafunktion über die Eulersche Integraldarstellung ein und zeigen ihre Funktionalgleichung. Außerdem sehen wir, dass die Gammafunktion die Fakultät interpoliert und erwähnen ohne Beweis die Legendresche Multiplikationsformel in [Kob84, S.91]. Ziel dieses Vortrages ist es ein p-adisches Analogon zur reellen Gammafunktion mit Hilfe der in den letzten Vorträgen entwickelten Theorie zu konstruieren. Wir sehen zunächst, dass wir unsere Interpolationstheorie nicht direkt auf die Fakultätsfolge anwenden können und müssen diese daher geeignet modifizieren. Wir zeigen, dass für $p > 2$ die so entstandene Folge die Eigenschaft aus [Kat07, Proposition 4.39] erfüllt und somit p-adisch interpoliert werden kann. Nachdem wir einige Eigenschaften der p-adischen Gammafunktionen untersucht haben, wollen wir zum Abschluss die zugehörige Interpolationsreihe bestimmen. Hierbei folgen wir [Coh07, Proposition 11.6.15 (1)], Teil (4) dieser Proposition kann ebenfalls ohne Beweis erwähnt werden.
Literatur: [Kob84, §IV.2], [Coh07, §11.6],[For11, S. 234ff]
Datum: 26. Juli 2016 **Vortragender: Michael J.**

Literatur

[Coh07] Cohen, H.: *Number Theory, Volume II.: Analytic and Modern Tools.* Springer Graduate Texts in Mathematics **240** (2007).

[For11] Forster, O.: *Analysis 1.* Vieweg+Teubner (2011).

[Gou97] Gouvêa, F.: *p-adic Numbers: An Introduction.* Springer Universitext, second edition (1997).

[Kat07] Katok, S.: *p-adic Analysis Compared with Real.* AMS Student Mathematical Library **37** (2007).

[Kob84] Koblitz, N.: *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions.* Springer Graduate Texts in Mathematics **58** (1984).

[Lan05] Lang, S.: *Algebra.* Springer Graduate Texts in Mathematics **211** (2005).

[Rob00] Robert, A. M.: *A Course in p-adic Analysis.* Springer Graduate Texts in Mathematics **198** (2000).